**Лабораторная работа 5.**

**Модели нелинейного программирования.**

**Задачами нелинейного программирования** называются задачи математического программирования, в которых нелинейны и (или) целевая функция, и (или) ограничения в виде неравенств или равенств.

Задачи нелинейного программирования можно классифицировать в соответствии с видом функции ***F(x)***, функциями ограничений и размерностью вектора х (вектора решений).

В самом общем виде классификация представлена в таблице.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Вид *F(x)*** | **Вид функции ограничений** | **Число переменных** | **Название задачи** |
| Нелинейная | Отсутствуют | 1 | Безусловная однопараметрическая оптимизация |
| Нелинейная | Отсутствуют | Более 1 | Безусловная многопараметрическая оптимизация |
| Нелинейная или линейная | Нелинейные или линейные | Более 1 | Условная нелинейная оптимизация |

Общих способов решения, аналогичных симплекс-методу линейного программирования, для нелинейного программирования не существует.   
В каждом конкретном случае способ выбирается в зависимости от вида функции ***F(x)***.   
Задачи нелинейного программирования на практике возникают довольно часто, когда, например, затраты растут не пропорционально количеству закупленных или произведённых товаров.

Многие ***задачи нелинейного программирования*** могут быть приближены к ***задачам линейного программирования***, и найдено близкое к оптимальному решению. Встречаются задачи квадратичного программирования, когда функция есть ***F(x)*** полином 2-ой степени относительно переменных, а ограничения линейны. В ряде случаев может быть применён метод штрафных функций, сводящей задачу поиска экстремума при наличии ограничений к аналогичной задаче при отсутствии ограничений, которая обычно решается проще.

Но в целом ***задачи нелинейного программирования*** относятся ***к трудным*** вычислительным задачам. При их решении часто приходится прибегать к приближенным **м*етодам оптимизации***. Мощным средством для решения задач нелинейного программирования являются численные методы. Они позволяют найти решение задачи с заданной степенью точности.

**Общая формулировка нелинейных задач:**

Найти переменные ***х1 , х2 , …, хn*** , удовлетворяющие системе уравнений

|  |  |
| --- | --- |
| ***Ψ ( х1 , х2 , …, хn ) = bi , i = 1, 2, …, m*** | (2.24) |

и обращающие в максимум ( минимум ) целевую функцию

|  |  |
| --- | --- |
| ***Z = f ( х1 , х2 , …, хn )*** | (2.25) |

Примером типичной и простой нелинейной задачи является следующая:   
Данное предприятие для производства какого-то продукта расходует два средства в количестве ***х1*** и ***х2*** соответственно. Это факторы производства, например, машины и труд, два различных сырья и т.п., а величины ***х1*** и ***х2*** – затраты факторов производства. Факторы производства впредь будем считать взаимозаменяемыми. Если это «труд» и «машины», то можно применять такие методы производства, при которых величина затрат машин в сопоставлении с величиной затрат труда оказывается больше или меньше (производство более или менее трудоемкое).

Объем производства (выраженный в натуральных или стоимостных единицах) является функцией затрат производства ***Z = f ( х1 , х2 )***. Эта зависимость называется **производственной функцией**. Издержки зависят от расхода обоих факторов (***х1*** и ***х2***) и от цен этих факторов (***c1*** и ***c2***). Совокупные издержки выражаются формулой ***b = c1 х1 + c2 х2***. Требуется при данных совокупных издержках определить такое количество факторов производства, которое максимизирует объем продукции ***Z***.

Математическая модель этой задачи имеет вид: определить такие переменные ***х1*** и ***х2***, удовлетворяющие условиям

|  |  |
| --- | --- |
| ***c1 х1 + c2 х2 = b*** | (2.26) |

|  |  |
| --- | --- |
| ***х1 ≥ 0, х2 ≥ 0,*** | (2.27) |

при которых функция

|  |  |
| --- | --- |
| ***Z = f (х1, х2 )*** | (2.28) |

достигает максимума. Как правило, функция (2.28) может иметь произвольный нелинейный вид.

Использую классические методы оптимизации, следует четко представлять себе различие между ***локальным*** экстремумом функции, ***глобальным*** экстремумом и ***условным*** экстремумом. Понятие условного экстремума вводится для случая, когда число переменных n не меньше ***2 (n ≥ 2)***. Будем полагать, что функция ***Z = f ( х1 , х2 , …, хn ) = f (X)*** дважды дифференцируема в точке ***Х\* = (х1 \*, х2 \*, …, хn\* )***, ***(Х\* € D(f))*** и в некоторой ее окрестности.

Если для всех точек ***Х*** этой окрестности ***f (X\*) ≥ f (X)*** или ***f (X\*) ≤ f (X)***, то говорят, что функция ***f (X)*** имеет экстремум в ***X\**** (соответственно максимум или минимум).

Точка ***X\**** , в которой все частные производные функции ***Z = f (Х)*** равны 0, называется **стационарной точкой**.

**Необходимое условие экстремума.**   
Если в точке ***X\**** функция ***Z = f (Х)*** имеет экстремум, то частные производные функции в этой точке равны 0:

***f 'x1 (X\*) = 0, i = 1, 2, ..., n.***

Следовательно, точки экстремума функции ***Z = f (Х)*** удовлетворяют системе уравнений:

|  |  |
| --- | --- |
| http://matmetod-popova.narod.ru/theme29/example_2_9_1.GIF | (2.29) |

Для получения достаточных условий следует определить в стационарной точке знак дифференциала второго порядка. Дифференциала второго порядка обозначается ***d2f (х1 , х2 , …, хn ) f 'x1 (X)*** найти частную производную по переменной ***хj*** , то получим частную производную второго порядка по переменным ***хi*** , ***хj*** , которая обозначается ***f ''xi, xj (X)***. В этом случае

http://matmetod-popova.narod.ru/theme29/example_2_9_2.GIF

**Достаточные условия экстремума.**  
Двух переменных:

* если ***Δ > 0*** и ***а11 < 0 (а22 < 0)***, то в точке ***Х 0*** функция имеет максимум:   
  если ***Δ > 0*** и ***а11 > 0 (а22 > 0)***,то в точке ***Х 0*** – минимум (в этих случаях ***Х 0 = Х\****);
* если ***Δ < 0***, то экстремума нет;
* если ***Δ = 0***, то вопрос об экстремуме остается открытым.

**Методы решения задач нелинейного программирования.**

**Пример 2.10.1**

Исследовать на экстремум функцию  
http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/example_2_10_1.GIF

Решение. Находим частные производные:

|  |  |
| --- | --- |
| http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/example_2_10_2.GIF | (2.30) |

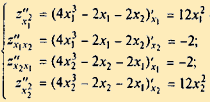
Приравниваем частные производные нулю:

|  |  |
| --- | --- |
| http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/example_2_10_3.GIF | (2.31) |

Решаем систему уравнений (2.31). Вычитая из первого уравнения второе, получим http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/example_2_10_4.GIF, поэтому ***x1 = x2*** , и из первого уравнения найдем http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/example_2_10_5.GIF, откуда ***x1 = 0*** или ***x1 = ±1***.

Имеем три стационарные точки: ***X1 = (0; 0)***; ***X2 = (1; 1)***; ***X3 = (-1; 1).***

Найдем вторые частные производные, используя (2.30):



Вычисляем значения вторых частных производных в каждой стационарной точке, составляем определитель ***Δ*** и применяем достаточные условия экстремума.   
В точке ***X1 = (0; 0) a11 = - 2; a12 = a21 = - 2; a22 = - 2;***

http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/example_2_10_7.GIF

Вопрос об экстремуме остается открытым (такая точка называется ***седловой***). В точке ***X2 = (1; 1)*** (а также и в точке ***X3 = (-1; 1)***):

|  |  |
| --- | --- |
| http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/example_2_10_8.GIF |  |

Функция в этих точках имеет минимум, так как ***Δ > 0, a11 > 0***.

Z***min*** = -2***1***

Выше шла речь о локальном экстремуме функции ***n*** переменных. Как правило, в практических задачах необходимо определить наибольшее и наименьшее значения функции (глобальный экстремум) в некоторой области. Говорят, что функция ***z = f (X)*** имеет в точке ***X0*** заданной области ***D*** *глобальный максимум (наибольшее значение)* или *глобальный минимум (наименьшее значение)*, если неравенство ***f(X) ≤ f(X0)*** или соответственно выполняется для любой точки ***X € D***.   
Если область ***D*** замкнута и ограничена, то дифференцируемая функция ***z = f (X)*** достигает в этой области своих наибольшего и наименьшего значений или в стационарной точке, или в граничной точке области (**теорема Вейерштрасса**).

Граница области ***D*** аналитически может быть задана системой уравнений (условий) относительно переменных ***x1***, ***x2***, ..., ***xn***. Поэтому, исследуя экстремальные свойства функции на границе, необходимо решить задачу определения условного экстремума.

***Условный экстремум.*** Пусть необходимо найти экстремум функции ***z = f (x1, x2, ..., xn )*** при условии, что переменные ***x1***, ***x2***, ..., ***xn*** удовлетворяют, уравнениям

|  |  |
| --- | --- |
| ***φi (x1, x2, ..., xn ) = 0, i = 1, 2, ..., m, m < n*** | (2.32) |

Предполагается, что функции ***f*** и ***φi***, имеют непрерывные частные производные по всем переменным. Уравнения (2.32) называют уравнениями связи. Говорят, что в точке удовлетворяющей *уравнениям связи* (2.32), функция ***z = f (X)*** имеет *условный максимум (минимум)*, если неравенство ***f(X0) ≥  f(X)*** ***(f(X0) ≤  f(X))*** имеет место для всех точек ***X***, координаты которых удовлетворяют уравнениям связи.   
Легко заметить, что задача определения условного экстремума совпадает с задачей нелинейного программирования.  
Один из способов определения условного экстремума применяется в том случае, если из уравнений связи (2.32) ***m*** переменных, например ***x1, x2, ..., xn***, можно явно выразить через оставшиеся ***n - m*** переменных:

|  |  |
| --- | --- |
| ***xi = ψi (xm + 1 , ..., xn ), i = 1, 2, ..., m,*** | (2.33) |

Подставив полученные выражения для ***xf*** в функцию ***z***, получи  
м***zi = f(ψi (xm + 1 , ..., xn ), ..., ψm (xm + 1 , ..., xn ), xm + 1 , ..., xn )***

или

|  |  |
| --- | --- |
| ***z = F(xm + 1 , ..., xn )*** | (2.34) |

Задача сведена к нахождению локального (глобального) экстремума для функции (2.34) от ***n - m*** переменных. Если в точке http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/example_2_10_9.GIFфункция (2.34) имеет экстремум, то в точке http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/example_2_10_10.GIFфункция ***z = f (x1, ..., xn )*** имеет условный экстремум.

**Пример 2.10.2**

Решить задачу   
http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/example_2_10_11.GIF  
Решение. Необходимо найти переменные ***x1*** и ***x2*** ,удовлетворяющиеуравнению

|  |  |
| --- | --- |
| ***x1*** + ***2x2 = 4*** | (2.35) |

(уравнение связи), условию неотрицательности ***x1> 0, x2 > 0***иобращающиевмаксимумфункцию

|  |  |
| --- | --- |
| http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/example_2_10_12.GIF | (2.36) |

Ограничение (2.35) вместе

|  |
| --- |
| http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/picture2_10_1.GIF |
| рис. 2.8 |

с условиями неотрицательности определяют на плоскости ***x1* Ох2** отрезок **AВ** — замкнутую ограниченную область (рис. 2.6).  
  
Согласно теореме Вейерштрасса максимум функции может достигаться либо внутри этого отрезка, либо в граничных точках: **А (4; 0)** или **В (0; 2)**.  
  
Следовательно, необходимо найти условный экстремум функции (2.36), если уравнение связи имеет вид (2.35).   
Из уравнения связи найдем, например, **х1**, и подставим в (2.36):  
***x1 = 4 - 2x2 , z = (4 - 2x2 )2 x2(4 - 4 + 2x2 - x2 )***

Упростив это выражение, получим

|  |  |
| --- | --- |
| ***z = 4 (2 - x2 )2 x22*** | (2.37) |

При этом ***x2 € [0; 2]*** . Найдем глобальный экстремум функции (2.37) на отрезке **[0; 2]**. Производная этой функции равна  ***z' = 16 (2 - x2 )x2(1 - x2 )***   
Стационарные точки: ***x2 = 0***, ***x2 = 1*** и ***x2 =2***.   
Одна из них ***х2 = 1***, лежит внутри отрезка, две другие совпадают с концами. Найдем значения функции (2.46) в стационарной точке ***x2 = 2*** и на концах отрезка: ***z(1) = 4***; ***z(0) = 0***; ***z(2) = 0.***   
Следовательно, ***Zmax = 4*** и достигается при ***x2 = 1*, *x1 =* 4 - 2*x2 =* 2**, т.е. в точке **[2; 1]**.   
Максимальный объем производства, равный ***Zmax = 4*** ед., достигается при условии, что затраты производственных факторов **х1** и **x2** равны соответственно 2 ед. и 1 ед.

**Метод множителей Лагранжа**

Другой способ определения условного экстремума начинается с построения вспомогательной функции Лагранжа, которая в области допустимых решений достигает максимума для тех же значений переменных ***x1, x2, ..., xn***, что и целевая функция ***z***.  
Пусть решается задача определения условного экстремума функции ***z = f (X)*** при ограничениях (2.32)   
Составим функцию

|  |  |
| --- | --- |
| http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/example_2_10_13.GIF | (2.38) |

которая называется *функцией Лагранжа*. ***X***, — постоянные множители (*множители Лагранжа*). Отметим, что множителям Лагранжа можно придать экономический смысл. Если ***f (x1, x2, ..., xn )*** — доход, соответствующий плану ***X = (x1, x2, ..., xn )***, а функция ***φi (x1, x2, ..., xn )*** — издержки i-го ресурса, соответствующие этому плану, то ***X***, — цена (оценка) i-го ресурса, характеризующая изменение экстремального значения целевой функции в зависимости от изменения размера i-го ресурса (маргинальная оценка). ***L(Х)*** — функция ***n + m*** переменных ***(x1, x2, ..., xn , λ1, λ2, ..., λn )***. Определение стационарных точек этой функции приводит к решению системы уравнений

|  |  |
| --- | --- |
| http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/example_2_10_14.GIF | (2.39) |

Легко заметить, что *http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/example_2_10_15.GIF*, т.е. в (2.48) входят уравнения связи. Таким образом, задача нахождения условного экстремума функции ***z = f (X)*** сводится к нахождению локального экстремума функции ***L(X)***. Если стационарная точка найдена, то вопрос о существовании экстремума в простейших случаях решается на основании достаточных условий экстремума — исследования знака второго дифференциала ***d2L(X)*** в стационарной точке при условии, что переменные приращения ***Δxi*** - связаны соотношениями

|  |  |
| --- | --- |
| http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/example_2_10_16.GIF | (2.40) |

полученными путем дифференцирования уравнений связи. Рассмотрим пример.

**Пример 2.10.3**

Найти наибольшее и наименьшее значения функции  
http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/example_2_10_17.GIFпри условии, что ***x1, x2, x3*** удовлетворяют уравнению http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/example_2_10_18.GIF

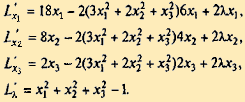
**Решение.** Уравнение связи определяет в пространстве сферу единичного радиуса с центром в начале координат (2.7). Так как сфера — замкнутое

|  |
| --- |
| http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/picture2_10_2.GIF |
| рис. 2.9 |

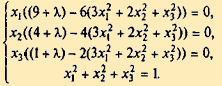
ограниченное множество, то согласно теореме Вейерштрасса функция достигает на ней своего наибольшего и наименьшего значений.   
Необходимо найти условный глобальный экстремум. Запишем уравнение связи в виде:

Составим функцию Лагранжа: Найдем частные производные этой функции по ***x1, x2***, ***λ.***

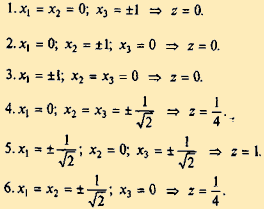
http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/example_2_10_19.GIF



Приравняв частные производные нулю, получим систему:



Решая систему, получим стационарные точки, в которых найдем значения функции ***Z***.



Выберем из всех значений ***z*** наибольшее и наименьшее: ***zнаиб. = 1***, а ***zнаим. = 0***. Легко видеть, в каких точках сферы достигаются эти значения.

Если число переменных ***n = 2***, нелинейные задачи можно решать геометрически. Ограничения должны быть записаны в виде неравенств

|  |  |
| --- | --- |
| ***φi (x1, x2 ) ≤ bi , i = 1, 2, ..., m,*** | (2.41) |

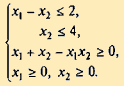
а целевая функция иметь вид

|  |  |
| --- | --- |
| ***z = f(x1, x2 )*** | (2.42) |

Как и в случае геометрического решения задач линейного программирования, сначала необходимо построить область допустимых решений (ОДР) — множество точек плоскости, удовлетворяющих неравенствам (2.41). Но в отличие от задач линейного программирования здесь ОДР не обязательно будет выпуклой и может быть даже разрывной. Экстремум функции может достигаться и внутри области, и на границе. После построения ОДР следует записать уравнения линий уровня целевой функции — множество точек плоскости, в которых целевая функция (2.42) постоянна: ***f(x1, x2 ) = C***, и определить направление возрастания (убывания) целевой функции, построив, например, линии уровня для разных значений ***С***.   
Затем, перемещая линию уровня в нужном направлении в ОДР, найти точки области, в которых целевая функция принимает оптимальное значение.

**Пример 2.10.4**

Найти наибольшие значения функции ***z = 2x12 - x2*** при ограничениях



Решение ОДР (рис. 2.8) ограничена прямыми ***x1 — x2 = 2, x2 = 4***, осями координат ***x1 = 0, x2 = 0*** и гиперболой ***x1 + x2 - x1 x2 - 0***, уравнение которой приводится к виду http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/example_2_10_24.GIF

Линии уровня целевой функции — ***2x12 - x2 = C***

Для разных значений ***С*** графиком уравнения ***x2 = 2x12 - C*** является парабола с осью симметрии, совпадающей с осью ординат. При ***С = 0*** парабола проходит через начало координат. При ***С > 0*** параболы

|  |
| --- |
| http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/picture2_10_3.GIF |
| Рис. 2.10 |

сдвигаются вниз. Перемещая в направлении возрастания, получим, что линии уровня покидают ОДР через точку ***X\**** пересечения гиперболы http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/example_2_10_25.GIFи прямой ***x1 - x2 = 2***.

Решая систему, составленную из этих двух уравнений, получим http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/example_2_10_26.GIFПоэтому http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/example_2_10_27.GIFили ***zmax ≈ 21,9.***

РЕШИТЬ ЗАДАЧИ:

В задачах **1-3** найти локальный экстремум следующих функций:

**1.** ***Z = x3 + y3 + 3xy***   
**2.** ***Z = x3y2 (12 - x - y), x > 0, y > 0***   
**3.** ***Z = x2 + xy + y2 + x – y + 1***

В задачах **4-6** найти глобальный экстремум функции ***Z*** в области решений системы неравенств (или неравенства). Дать геометрическое решение.

**4.** ***Z = 3x1 + х2  
*5**. ***Z = x12 + 2x2 - 3***  
http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/example_2_10_29.GIF  
**6**. ***Z = x1 x2  
http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/example_2_10_30.GIF***

В задачах **7-9** найти условный экстремум с помощью метода Лагранжа:

**7.** ***Z = x1 x2*** при ***x12 + x22 = 2***   
**8.** ***Z = x1 + x2***  при  http://matmetod-popova.narod.ru/theme210/example_2_10_31.GIF  
**9.** ***Z = x13 + x23*** при ***x1 + x2*** = 2, ***x1 ≥ 0, x2  ≥ 0***